

IL CALCOLO DI VERIFICA DI UN SISTEMA DI TRASMISSIONE DOVREBBE INCLUDERE TUTTI GLI ELEMENTI PRINCIPALI DEL SISTEMA, VALE A DIRE INGRANAGGI, CUSCINETTI, ALBERI E, A SECONDA DELL'APPLICAZIONE, ANCHE ALTRI COMPONENTI COME VITI, ACCOPPIAMENTI E CONNESSIONI. GLI INGRANAGGI SONO CHIARAMENTE LE PARTI PIÙ COMPLESSE DEL CALCOLO DI VERIFICA MA, IN MOLTI CASI, UN GUASTO DEL RIDUTTORE HA ORIGINE IN UN GUASTO DELL'ALBERO O DEL CUSCINETTO. SCOPO DI QUESTO ARTICOLO È SPIEGARE COME POSSA ESSERE GESTITO IL CALCOLO DI VERIFICA DI UN SISTEMA DI TRASMISSIONE SULLA BASE DEI DATI MISURATI O SIMULATI DI COPPIA-VELOCITÀ-TEMPO

**Ulrich Kissling** KISSsoft AG

# VALUTAZIONE OLISTICA DEI SISTEMI DI TRASMISSIONE SULLA BASE DEI DATI MISURATI DI COPPIA-VELOCITÀ

I calcolo di verifica di un motoriduttore con carico/velocità di riferimento può essere eseguito in tre modi:

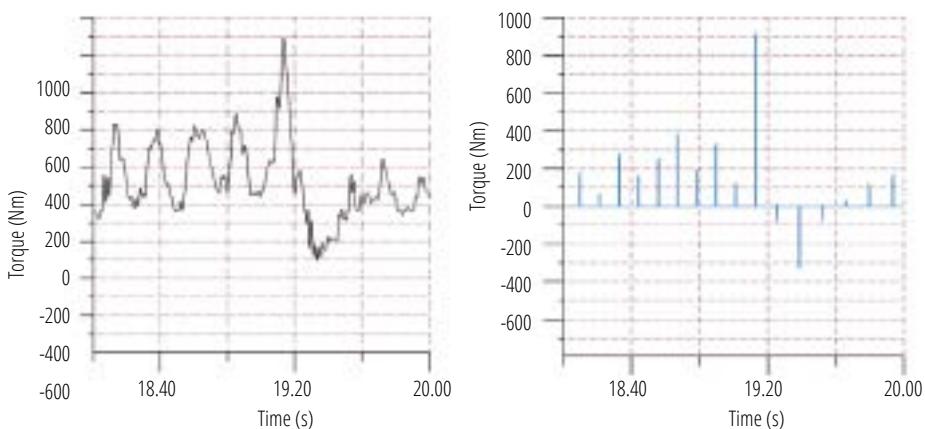
- Sulla base di un carico assegnato e della durata richiesta, per calcolare i corrispondenti fattori di sicurezza e confrontarli con un fattore di sicurezza minimo richiesto. Tale procedura corrisponde ai metodi riportati nella maggior parte delle norme ISO (ad esempio ISO 6336 [2] per gli ingranaggi).
- Sulla base dei fattori di sicurezza minimi richiesti e della durata richiesta, per calcolare la cosiddetta potenza nominale (o coppia nominale o coppia trasmissibile). Tale procedura corrisponde ai metodi riportati in molte norme AGMA (ad esempio AGMA 2001 [4] per gli ingranaggi).
- Sulla base di un carico assegnato e dei fattori di sicurezza minimi richiesti, per calcolare la durata raggiungibile.

Queste varianti non sono così diverse come può sembrare. Una variante può essere facilmente trasformata in un'altra, a seconda del risultato documentato richiesto: fattori di sicurezza raggiunti (tramite a), potenza trasmissibile (tramite b) o durata raggiungibile (tramite c).

Se il carico deriva da dati misurati (ad esempio informazioni di tempo-coppia-velocità) o da una simulazione numerica, l'approccio è simile. Queste informazioni devono essere convertite in uno spettro di carico che può essere utilizzato per i calcoli sugli ingranaggi secondo le normative ISO o AGMA, sulla base dei metodi descritti in ISO 6336-6 [3]. Con gli spettri di carico (o "carico variabile" in termini ISO), per i calcoli di verifica viene normalmente utilizzata la variante a), ma può essere applicata an-

che la variante c). In questo caso, la procedura descritta nelle normative AGMA va leggermente adattata [1].

Se la definizione del carico prevede un carico variabile, allora tutti gli elementi del sistema di trasmissione che dispongono di metodi di verifica, come gli ingranaggi, che considerano la resistenza del materiale in funzione del numero di cicli di carico (curve di Woehler), dovrebbero utilizzare queste informazioni per un'analisi appropriata. Per altri elementi (come viti e chiavette),



**Figura 1.** Coppia nel tempo in una serie temporale (a sinistra); coppia su un dente specifico del pignone (a destra)

che di solito vengono controllati tramite analisi statica, verrà considerato solo il bin più critico dello spettro di carico (il carico massimo).

Nei paragrafi a seguire verrà trattato il metodo per generare uno spettro di carico a partire dai dati di tempo-coppia-velocità. Il metodo utilizzato dipende dall'elemento macchina considerato e, pertanto, è piuttosto diverso per ingranaggi, cuscinetti e alberi.

Verrà poi trattato il metodo di verifica con carico variabile per gli elementi critici dei sistemi di trasmissione, come ingranaggi, cuscinetti e alberi. Particolare interesse riveste il calcolo di verifica degli alberi con carico variabile, poiché né le norme ISO né quelle AGMA dispongono di un metodo di verifica: solo la direttiva tedesca FKM ne prevede uno [5].

### **Generazione di uno spettro di carico**

I dati di tempo-coppia-velocità vengono solitamente misurati in corrispondenza dell'accoppiamento in ingresso o in uscita di un sistema di trasmissione. Per ottenere il carico sull'elemento macchina considerato, tali dati devono essere modificati applicando un fattore (rapporto di trasmissione) e vanno successivamente adattati in base al tipo di elemento considerato. Il dente di un ingranaggio in rotazione viene caricato solo al momento del contatto con il dente. Di conseguenza, un dente è sottoposto a una successione di carichi pulsanti ed è sollecitato solo da una parte dei dati di carico complessivi. Alberi e cuscinetti sono invece costantemente sotto carico e ricevono l'intero spettro dei dati di carico. Gli elementi macchina con sollecitazione da flessione sono molto sensibili alle variazioni di carico. Ciò vale per i denti degli ingranaggi e gli alberi, ma non per i cuscinetti. Per identificare tutti i cicli significativi con variazioni di coppia, si utilizza il cosiddetto metodo Rainflow [6, 7]. L'analisi Rainflow fornisce una matrice che mostra con quale frequenza si verificano eventuali variazioni di coppia. Per i cuscinetti può essere utilizzato un metodo molto più semplice, chiamato "metodo del conteggio semplice" [1, 3]. La tabella 1 fornisce una panoramica dei diversi metodi.

A seconda del tipo di elemento macchina e dei dati di carico (se sempre positivi oppure positivi e negativi) devono essere generati differenti tipi di spettro di carico. Per la definizione di questi tipi si veda la tabella 2.

Calcolo di verifica di:	Carico (coppia * velocità) $\geq 0$ (sempre positivo)	Carico $\geq 0$ e $< 0$ (positivo e negativo)
<b>Ingranaggi</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Opzionale: estrarre il carico su un singolo dente</li> <li>- Ottenere lo spettro di carico con il "metodo del conteggio semplice"</li> <li>- Generato uno spettro di carico di tipo A</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Estrarre il carico su un singolo dente</li> <li>- Includere il fattore dinamico KV</li> <li>- Applicare l'algoritmo "Rainflow"</li> <li>- Ottenere lo spettro di carico dal risultato Rainflow</li> <li>- Generato uno spettro di carico di tipo C</li> </ul>
<b>Cuscinetti</b>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ottenere lo spettro di carico con il "metodo del conteggio semplice"</li> <li>- Generato uno spettro di carico di tipo A</li> </ul>
<b>Alberi</b>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Applicare l'algoritmo "Rainflow"</li> <li>- Ottenere lo spettro di carico dal risultato Rainflow</li> <li>- Generato uno spettro di carico di tipo B</li> </ul>

**TABELLA 1 – DATI DI TEMPO-COPPIA-VELOCITÀ UTILIZZATI PER OTTENERE UNO SPETTRO DI CARICO**

Tipo di spettro di carico	
<b>A</b>	Spettro di carico con distribuzione di coppia e velocità ("metodo del conteggio esteso")
<b>B</b>	Spettro di carico con distribuzione della coppia ("algoritmo Rainflow"). Contiene, per ogni bin, fattori aggiuntivi del rapporto di sollecitazione per il calcolo dell'albero. Nessuna distribuzione di velocità disponibile. Tutti i bin dello spettro di carico presentano una velocità media.
<b>C</b>	Spettro di carico con distribuzione della coppia ("algoritmo Rainflow"). Contiene, per ogni bin, il fattore aggiuntivo di flessione alternata YM per il calcolo degli ingranaggi. Nessuna distribuzione di velocità disponibile. Tutti i bin dello spettro di carico presentano una velocità media.

**TABELLA 2 – TIPI DI SPETTRO DI CARICO GENERATI**

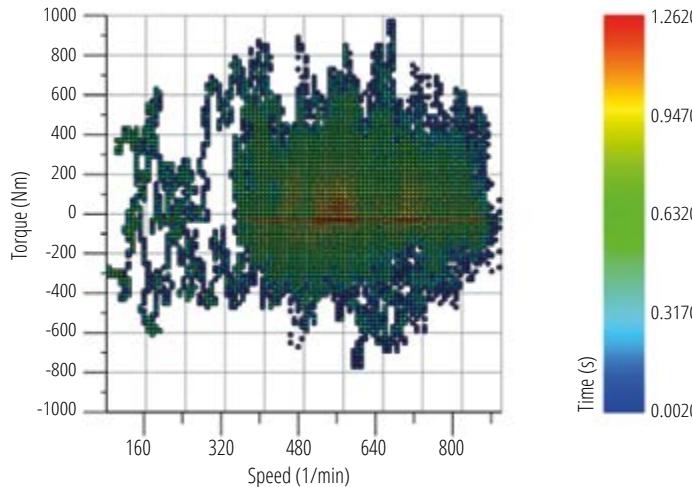
### **Generazione di uno spettro di carico per gli ingranaggi**

Il dente di un ingranaggio in rotazione viene caricato solo al momento del contatto con il dente. Di conseguenza, un dente è sottoposto a una successione di carichi pulsanti ed è sollecitato solo da una parte dei dati di carico complessivi. Alberi e cuscinetti sono invece costantemente sotto carico e ricevono l'intero spettro dei dati di carico. Gli elementi macchina con sollecitazione da flessione sono molto sensibili alle variazioni di carico. Ciò vale per i denti degli ingranaggi e gli alberi, ma non per i cuscinetti. Per identificare tutti i cicli significativi con variazioni di coppia, si utilizza il cosiddetto metodo Rainflow [6, 7]. L'analisi Rainflow fornisce una matrice che mostra con quale frequenza si verificano eventuali variazioni di coppia. Per i cuscinetti può essere utilizzato un metodo molto più semplice, chiamato "metodo del conteggio semplice" [1, 3]. La tabella 1 fornisce una panoramica dei diversi metodi.

Se in una serie temporale i segni della coppia e della velocità sono tali per cui è sempre in contatto lo stesso fianco, si può utilizzare il cosiddetto metodo del conteggio semplice. Questo metodo di conteggio è documentato anche nella norma ISO 6336-6, tabella 4 [3]. Per ottenere gli spettri di carico per il calcolo dei danni da fatica, l'intervallo dei carichi misurati (o calcolati) viene suddiviso in bin o classi. Se la velocità varia in modo significativo, per ottenere risultati migliori vengono creati intervalli di velocità e ciascun punto di misura viene classificato nella categoria corrispondente di coppia e velocità. Si conta il numero di punti di misura e si ottiene così uno spettro di carico composto da bin con coppie e velocità diverse (metodo del "conteggio semplice" esteso), (figura 2). Se la coppia e/o la velocità hanno segni al-

ternati e quindi il fianco caricato cambia, per la valutazione della pressione di Hertz sul fianco del dente considerato (destro o sinistro) si considerano solo i valori positivi su questo fianco. Per la sollecitazione di flessione non è possibile applicare questa semplice procedura di calcolo. Il lato del piede del dente considerato è sottoposto a un carico alternato e riceve una sollecitazione di trazione con coppia positiva e una sollecitazione di compressione con coppia negativa. Tutti i casi significativi di carico alternato devono essere estratti dalla curva di coppia attraverso l'algoritmo del conteggio Rainflow. Il risultato dell'algoritmo è una semi-matrice che mostra la frequenza con cui la coppia cambia da  $T_{high}$  a  $T_{low}$  (figura 3).

La norma ISO 6336 è stata pensata per un carico pulsante sul dente; pertanto, i valori di coppia nominale e di sollecitazione di flessione ammissibile sono intesi per il caso di carico pulsante. Nella meccanica generale, un caso di carico è definito dal rapporto di sollecitazione R [5]. È il rapporto tra la sollecitazione più bassa e quella più alta che si verifica mentre la sollecitazione oscilla durante l'esercizio. Pertanto,



**Figura 2.** Risultato del metodo del “conteggio semplice” esteso, distribuzione coppia-velocità con indicazione della durata in secondi

	T <sub>low</sub>				
T <sub>high</sub>	-796.70 -778.60	-778.60 -760.49	-760.49 -742.38	-742.38 -724.28	...
-796.70 -778.60	1				
-778.60 -760.49	0	2			
-760.49 -742.38	0	0	3		
-742.38 -724.28	1	4	0	1	

**Figura 3.** Estratto di una semi-matrice Rainflow con 100 bin

per il caso di carico pulsante, il rapporto è  $R = 0$  (poiché la sollecitazione oscilla tra 0 e  $\sigma_{\text{high}}$ ).

Definizione generale del rapporto di sollecitazione R [5]

$$R = \sigma_{\text{low}} / \sigma_{\text{high}}; \quad (1)$$

Nella flessione del dente, la sollecitazione  $\sigma_b$  è proporzionale al carico tangenziale nominale  $F_t$ , e poiché  $F_t$  è proporzionale alla coppia  $T$ , per la flessione del dente il rapporto R può essere espresso come segue:

$$R = F_{\text{low}} / F_{\text{high}} = T_{\text{low}} / T_{\text{high}} \quad (1a)$$

Per la flessione alternata, nella norma ISO 6336-3, allegato B [2], viene fornita una regola per coprire i casi di carico con rapporti di sollecitazione  $-1 \leq R \leq 0$  con il fattore di flessione alternata  $Y_M$  (vedi eq. 1). Poiché nel caso generale R può essere compreso nell'intervallo  $-\infty < R \leq +1$ , la formula per  $Y_M$  deve essere ampliata come documentato in [1]. Un insieme di  $\{T_{\text{high}}, T_{\text{low}}\}$  può così essere convertito in  $\{T_{\text{high}}, Y_{M1} \text{ e } Y_{M2}\}$  in conformità alla nomenclatura ISO 6336.

Si noti che nella norma ISO 6336-3, allegato B [2], la definizione di rapporto di sollecitazione R sembra essere diversa dall'equazione (1), ma in realtà non lo è. In ISO, il carico  $F_{\text{low}}$  è il carico applicato sul fianco opposto (valore positivo), ma genera una sollecitazione di compressione-flessione (negativa) sul fianco considerato. Inoltre, la sollecitazione di compressione andrebbe moltiplicata per 1,2 poiché la sollecitazione di compressione sul fianco non caricato è superiore di circa il 20% rispetto alla sollecitazione di trazione sul fianco caricato.

Il fattore 1,2 è utilizzato nella norma ISO 6336-3 e può essere confermato dai calcoli FEM. Pertanto, la definizione del rapporto di sollecitazione secondo l'equazione [B.2] in ISO 6336-3 con  $R = -1,2 * F_{\text{low}} / F_{\text{high}}$  è identica alla definizione utilizzata nella meccanica generale (come sopra).

Ogni elemento della semi-matrice Rainflow deve essere convertito in un bin del ciclo di lavoro. Per essere conforme alla norma ISO 6336-6, un bin deve contenere le ore di esercizio per bin, coppia, velocità e, in aggiunta, i fattori di flessione alternata  $Y_{M1}$ ,  $Y_{M2}$  per la coppia di ingranaggi. La procedura completa [1] per convertire i dati tempo-coppia-velocità in un ciclo di lavoro per ingranaggi è complessa, (figura 4).

Se la coppia e/o la velocità hanno segni alternati, va utilizzato il metodo Rainflow per ottenere tutte le variazioni significative nel passaggio da carico positivo a carico negativo. Il metodo Rainflow troverà molte variazioni di carico durante l'intervallo di tempo misurato, indipendentemente dalle informazioni sulla velocità. Le informazioni sulla velocità non possono essere considerate e andranno perse. Nello spettro di carico risultante viene quindi utilizzata la velocità media.

#### Generazione di uno spettro di carico per i cuscinetti

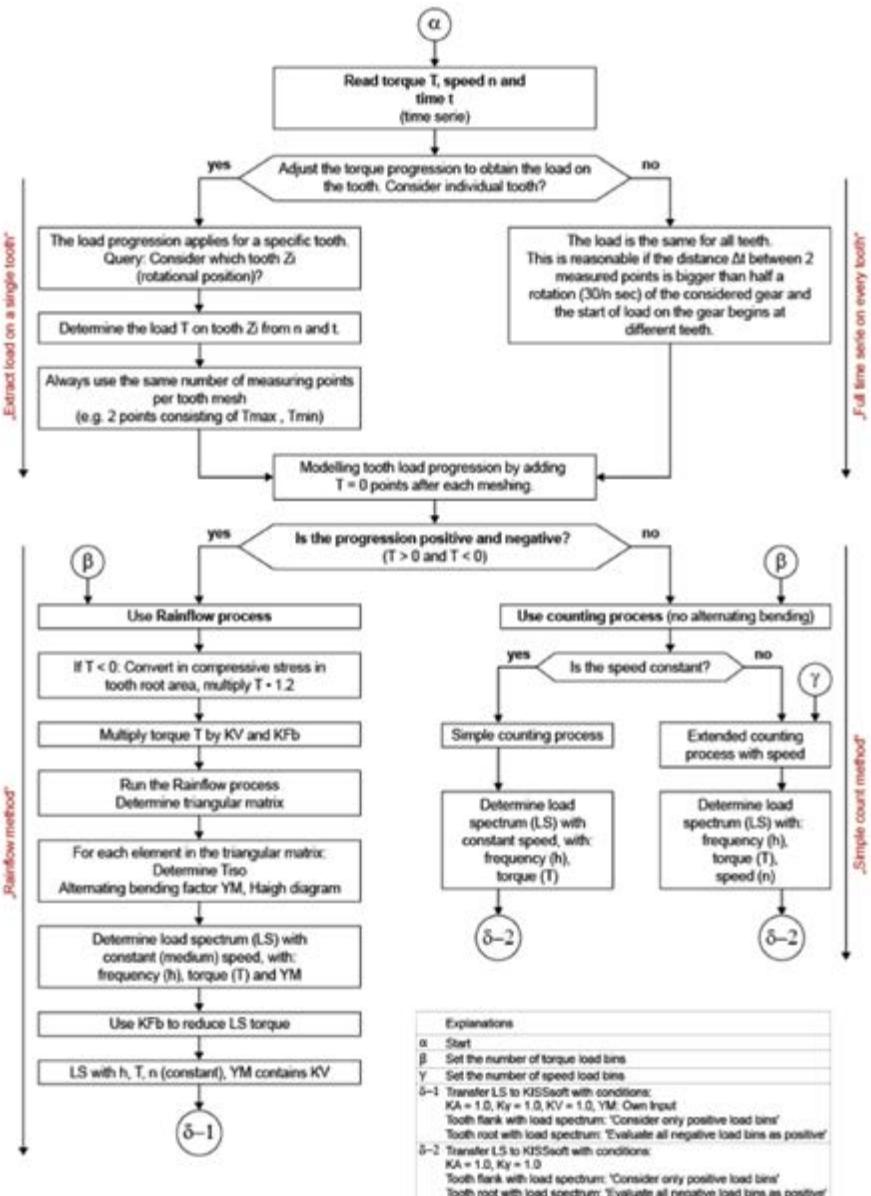
Le forze sui cuscinetti dipendono dai carichi applicati all'albero corrispondente. I segni di coppia e velocità applicati all'albero non sono rilevanti per i calcoli di verifica sui cuscinetti. Va invece considerata la variazione di velocità, quindi il metodo del “conteggio semplice” esteso, che genera uno spettro di carico con distribuzione di carico e velocità, è il metodo corretto.

#### Generazione di uno spettro di carico per gli alberi

Nei sistemi di trasmissione gli alberi sono sottoposti a sollecitazioni di flessione, trazione/compressione assiale, torsione e taglio. Un punto sul diametro esterno di un albero in rotazione è sottoposto a sollecitazione di trazione in una posizione e a sollecitazione di compressione quando è ruotato di 180° (figura 5). Pertanto, un albero con ingranaggi in rotazione sotto-posto a una coppia variabile – quando la coppia varia lentamente (molto più lentamente rispetto alla velocità dell'albero) – è sostanzialmente sottoposto a sollecitazione di flessione e taglio alternate. Al contrario, la sollecitazione di torsione è quasi costante, dal momento che varia molto più lentamente a seconda delle variazioni della coppia applicata. Nei calcoli semplificati spesso si presuppone che la torsione sia pulsante (ipotizzando una coppia pulsante a ogni rotazione). Questa ipotesi presenta ampi margini di sicurezza, poiché normalmente la variazione in termini di torsione per rotazione è molto inferiore.

Se il numero reale di variazioni di coppia viene estratto dai dati tempo-coppia con il metodo Rainflow, allora la distribuzione delle sollecitazioni di torsione è più realistica e fornisce risultati migliori. Le stesse considerazioni si applicano anche alle sollecitazioni di trazione/compressione assiali. L'analisi Rainflow fornisce la coppia superiore  $T_{\text{high}}$  e la coppia inferiore  $T_{\text{low}}$  di un bin dello spettro di carico. Per un calcolo dell'albero secondo la regola FKM [5], si utilizzano la coppia superiore  $T_{\text{high}}$  e il fattore per il rapporto di sollecitazione R (vedi equazione 1). Pertanto, un bin dello spettro di carico deve contenere anche i fattori R per la torsione e la trazione/compressione assiale secondo l'equazione (1), e  $R = -1$  per la flessione e il taglio. Per ulteriori dettagli sulla gestione di  $T_{\text{high}}$  ed R, si veda il paragrafo 3.3.

Si noti che nella sezione dell'albero in cui



**Figura 4.** Diagramma di flusso per generare uno spettro di carico per ingranaggi a partire dai dati di una serie temporale

(1937) e M. Miner (1945). La formula è ben documentata in letteratura (Niemann-Winter [9]) o nei manuali dei produttori di cuscinetti [10].

La formula principale per il calcolo della vita utile totale dei cuscinetti, combinando la vita utile per bin, è documentata nella formula (2). La vita utile può includere l'effetto della lubrificazione e/o la valutazione di riferimento modificata secondo ISO 16281 [11].

$$L_{hna} = \frac{100}{\frac{h_1}{L_{hna1}} + \frac{h_2}{L_{hna2}} + \dots + \frac{h_m}{L_{hnam}}} \quad (2)$$

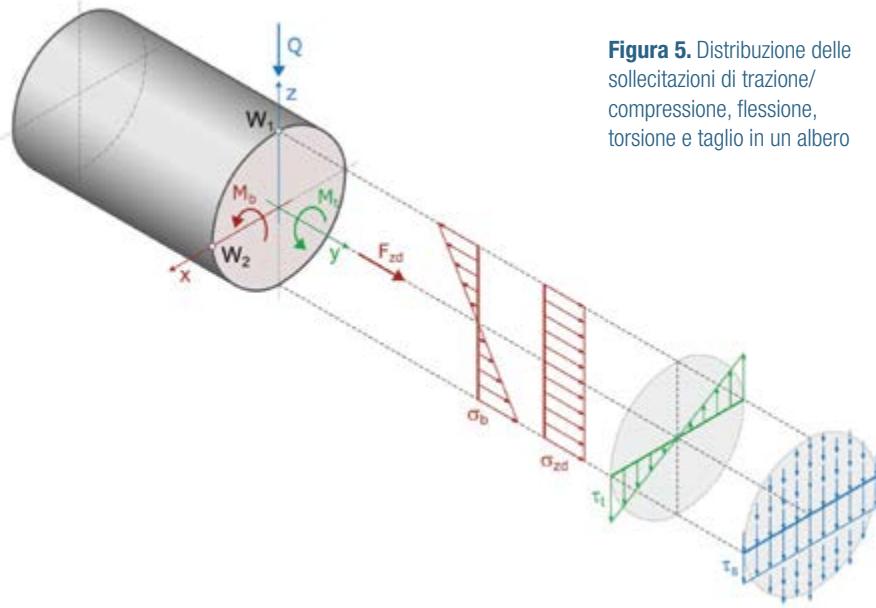
#### Valutazione dei cuscinetti con uno spettro di carico

Non esiste una norma internazionale che fornisca una regola per la valutazione dei cuscinetti con spettro di carico. La procedura di calcolo si basa sulla teoria del danno cumulativo sviluppata da A. Palmgren nel 1924 e completata da B. F. Langer

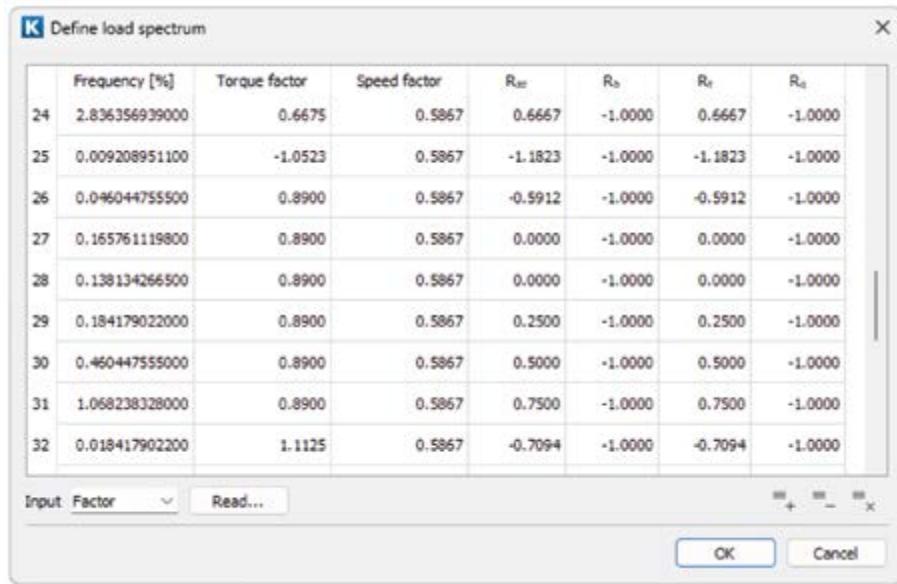
ma con applicazione limitata. La norma DIN 743 [8] contiene indicazioni sulle sollecitazioni equivalenti di danno. Tuttavia, l'unico metodo ufficiale che può coprire e completare questo compito è la direttiva tedesca FKM [5].

Si noti che i simboli utilizzati nella direttiva FKM si basano sulle precedenti norme TGL della Germania Est e, purtroppo, sono piuttosto diversi dai simboli usati in letteratura, nelle norme DIN o ISO. Tutti i simboli utilizzati sono elencati nella tabella dei simboli di questo articolo.

La direttiva FKM contiene varianti della procedura di calcolo per acciaio o altri materiali, così come per parti macchina saldate e non saldate, ed è quindi piuttosto complessa. Per il calcolo di verifica degli alberi va eseguita la valutazione della resistenza a fatica con sollecitazioni nominali.



**Figura 5.** Distribuzione delle sollecitazioni di trazione/compressione, flessione, torsione e taglio in un albero



**Figura 6.** Spettro di carico per il calcolo di verifica dell'albero (estratto che mostra i bin da 24 a 32), coppia e velocità come fattori da moltiplicare per i valori nominali

In questo articolo verranno riassunti solo i passaggi principali del calcolo con sollecitazioni nominali per l'acciaio utilizzando il metodo "Miner elementare" con regola della "valutazione ampiezza equivalente" [5].

Per il calcolo di verifica degli alberi normalmente vengono selezionate diverse sezioni dell'albero, su cui viene effettuata un'analisi dettagliata. Nella sezione di un albero, in generale, agiscono diversi tipi di sollecitazione: assiale (trazione o compressione)  $S_{zd}$ , di flessione  $S_b$ , di torsione  $T_t$  e di taglio

$T_s$ . Devono essere utilizzati i loro valori massimi e minimi ( $S_{\max}, S_{\min}$  o  $T_{\max}, T_{\min}$ ). Con uno spettro di carico, per ogni bin dello spettro, in una determinata sezione dell'albero devono essere calcolati i carichi massimi (forza assiale  $F_{zd,\max}$ , momento flettente  $M_{b,\max}$ , momento torcente  $M_{t,\max}$  e forza di taglio  $Q_{\max}$ ). Poi si determinano le corrispondenti sollecitazioni massime (assiale  $S_{zd,\max}$ , di flessione  $S_{b,\max}$ , di torsione  $T_{t,\max}$  di taglio  $T_{s,\max}$ ), utilizzando equazioni ben note (come in AGMA 6001, capitolo 4.4, [13] o in [5], formula 1.1.1). Le sollecitazioni mi-

nime possono essere ricavate con i fattori di rapporto:

Aampiezza di sollecitazione  $S_a$ , sollecitazione media  $S_m$ , rapporto di sollecitazione  $R$ :

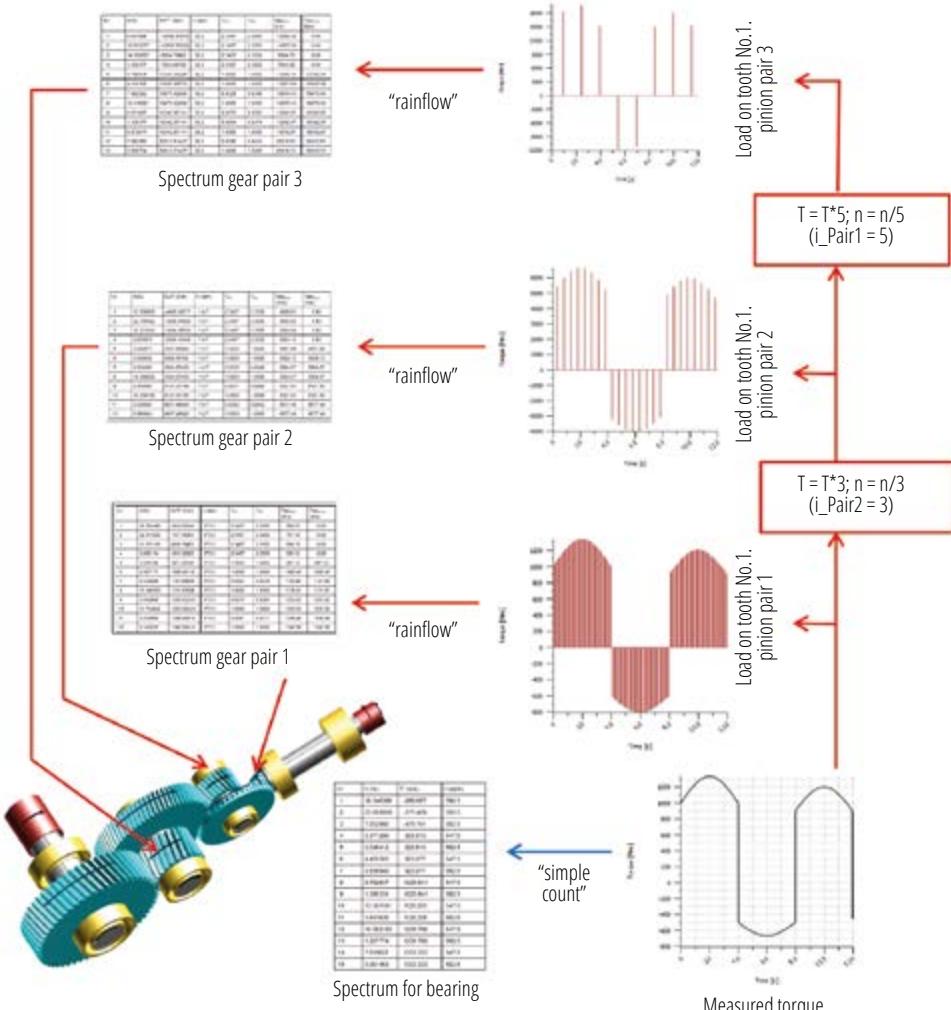
$$S_a = (S_{\max} - S_{\min}) / 2; S_m = (S_{\max} + S_{\min}) / 2; R = (S_m - S_a) / (S_m + S_a) = S_{\min} / S_{\max} \quad (3)$$

La distribuzione delle sollecitazioni in una sezione dell'albero è complessa e diversa per i quattro tipi di sollecitazioni (figura 5). In un punto specifico di una sezione dell'albero, la sollecitazione risultante è una combinazione dei quattro tipi di sollecitazioni, secondo l'ipotesi della sollecitazione normale o il criterio di von Mises [5]. Per l'acciaio non saldato è preferito von Mises. Di solito, due punti nelle posizioni W1 e W2 (figura 5) di una sezione dell'albero sono i più sollecitati e devono essere verificati. Un calcolo di verifica con sollecitazioni nominali consiste in una valutazione della resistenza statica e una valutazione della resistenza a fatica. La resistenza statica viene verificata con il bin dello spettro di carico con le sollecitazioni più elevate. Quindi, per ogni bin, viene calcolata la sollecitazione combinata risultante (utilizzando le sollecitazioni massime  $S_{zd,\max}, S_{b,\max}, T_{t,\max}, T_{s,\max}$ ) e il calcolo di verifica viene eseguito con il valore più alto trovato. Secondo FKM devono essere eseguite la verifica statica rispetto alla sollecitazione di trazione  $R_m$  e alla resistenza di snervamento  $R_p$ . Inoltre, in caso di temperature elevate, è richiesta la verifica rispetto alla resistenza allo scorrimento  $R_{m,Tt}$  e rispetto al limite di scorrimento  $R_{p,Tt}$ .

#### Verifica della resistenza a fatica

Per la resistenza a fatica, sono rilevanti le ampiezze di sollecitazione (eq. 3) di tutti i bin che contribuiscono al danno cumulativo. L'ampiezza equivalente  $S_{equ}$  utilizzata in FKM è un'ampiezza di sollecitazione costante con un numero di cicli assegnato uguale a quello al ginocchio della curva di Woehler, che è equivalente di danno allo spettro di sollecitazione considerato, tenendo conto della forma della curva di Woehler, del numero totale di cicli richiesto e dell'ampiezza massima nello spettro. La descrizione della procedura di verifica con tutte le formule esula dallo scopo di questo articolo. Pertanto verranno presentati solo alcuni dei passaggi più importanti.

Per ogni componente della sollecitazione (assiale, di flessione, di torsione e di taglio) si applica la stessa procedura. Nel primo passaggio, il valore della sollecitazione me-



**Figura 7.** Una serie temporale sintetica applicata all'accoppiamento in ingresso di un riduttore a 3 stadi. Il carico su un singolo dente di ciascun pignone nel sistema è estratto dalla serie temporale e poi convertito in uno spettro di carico specifico per ogni stadio ingranaggio

dia con ampiezza (sollecitazione  $S_{m,i}$  e  $S_{a,i}$ ) di ogni bin viene convertito in una sollecitazione alternata equivalente con ampiezza  $S_{aW,i}$  (con  $S_{m,i} = 0$  e  $S_{aW,i}$ ). Poi la serie di bin deve essere riordinata, in modo che il primo bin abbia l'ampiezza maggiore ( $S_{aW,1}$ ). Nel terzo passaggio, deve essere determinato il fattore di ampiezza variabile, utilizzando le equazioni 4 e 5.

Il fattore di ampiezza variabile  $K_{BK}$ , eq. 2.4.39 in FKM [5], è

$$K_{BK} = (ND * A_{ele} / N)^{1/k} \quad (4)$$

con  $A_{ele}$ , la distanza tra la curva di durata a fatica e la curva di Woehler, eq.2.4.42 in FKM [5],

$$A_{ele} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{h_i}{100} \left( \frac{s_{ai}}{s_{a1}} \right)^k} \quad (5)$$

con  $k$ , l'esponente della curva di Woehler (per l'acciaio  $k = 5$  con sollecitazioni normali e  $k = 8$  con sollecitazioni di taglio).

Questo permette di ottenere l'ampiezza di sollecitazione equivalente al ginocchio della curva di Woehler,  $S_{equ}$ , FKM eq.2.4.27 [5].

$$S_{equ} = S_{a,1} / K_{BK} \quad (6)$$

Per la valutazione della resistenza a fatica, a seconda della posizione della sezione dell'albero considerata, nei punti con spallamenti, scanalature per linguette ecc., le sollecitazioni sono maggiori a causa della concentrazione di sollecitazioni locali. Nella direttiva FKM [5], così come in AGMA 6001 [13] o DIN 743 [8], per il calcolo di verifica vengono utilizzate le sollecitazioni nominali (non aumentate), ma la resistenza a fatica è modificata (ridotta) dai fattori di concentrazione delle sollecitazioni. Come menzionato in AGMA, "poiché la resistenza a fatica è fortemente influenzata da condizioni fisiche, ambientali e applicative, nonché dalle condizioni del materiale, la resistenza a fatica di base deve essere mo-

dificata [13]". Nella direttiva FKM [5] tutti questi effetti sono documentati e combinati nel cosiddetto "coefficiente di design"  $K_{WK}$ . Pertanto, il limite di fatica del componente per sollecitazione assiale, di flessione, di torsione e di taglio viene ridotto dal coefficiente di design per componente, al fine di ottenere i valori nominali effettivi del limite di fatica del componente  $S_{WK}$ ,  $T_{WK}$ . Nelle valutazioni ISO o AGMA, il risultato finale di un calcolo di verifica è il fattore di sicurezza ottenuto dividendo la sollecitazione ammissibile per la sollecitazione effettiva. La risultante sicurezza  $S$  deve essere uguale o superiore alla sicurezza minima richiesta  $S_{min}$ . Il risultato ottenuto con la direttiva FKM non è un fattore di sicurezza, ma il "grado di utilizzazione". Il grado di utilizzazione non è altro che il valore inverso del fattore di sicurezza. Il vantaggio del concetto di utilizzazione è dato dal fatto che le formule per il calcolo di verifica con sollecitazioni combinate sono più semplici. Ai fini di questo articolo si utilizza il concetto di sicurezza e le formule FKM sono adattate di conseguenza. Come simbolo per la sicurezza utilizziamo qui  $SY$ , poiché il simbolo  $S$  nella direttiva FKM è usato per la sollecitazione nominale.

L'equazione di base per la sicurezza del componente  $SY$ , pari al valore inverso del grado di utilizzazione  $a_{BK}$  secondo la direttiva FKM, eq. 2.6.3 [5], per sollecitazione assiale, di flessione e di torsione è:

$$S_{YBK} = 1 / a_{BK} = S_{WK} / S_{equ} \quad (7)$$

Pertanto, sulla base della sollecitazione applicata e della sollecitazione ammissibile per componente, i fattori di sicurezza ottenuti sono  $S_{YBK,zd}$ ,  $S_{YBK,b}$ ,  $S_{YBK,t}$  e  $S_{YBK,s}$ . Per considerare le sollecitazioni combinate in un albero, questi fattori vengono poi combinati secondo il criterio di von Mises (eq. 2.6.7, FKM [5]) così da ottenere il risultato finale.

$$\frac{1}{SY} = \sqrt{\left( \frac{1}{S_{YBK,zd}} + \frac{1}{S_{YBK,b}} \right)^2 + \left( \frac{1}{S_{YBK,t}} + \frac{1}{S_{YBK,s}} \right)^2} \quad (8)$$

In una sezione dell'albero, ci sono due posizioni in cui la sollecitazione combinata può essere più elevata, le posizioni W1 e W2 nella fig.5. Nel punto W1, le sollecitazioni di flessione e quelle di torsione sono elevate, ma il taglio è nullo. In W2, le sollecitazioni di taglio e quelle di torsione sono elevate,

ma la flessione è nulla. Pertanto, entrambe le posizioni devono essere controllate per trovare il fattore di sicurezza più basso. Il calcolo di verifica per appurare che la sezione dell'albero soddisfi la richiesta è quindi dato da:

$$\min\{S_{yw1}, S_{yw2}\} \geq j_D \quad (9)$$

con il fattore di sicurezza minima richiesta  $j_D$  per la valutazione della resistenza a fatica. Nei casi in cui le conseguenze di un guasto dell'albero risultano essere gravi, per questo fattore si può assumere il valore 1,5.

## Calcolo di verifica dei sistemi di trasmissione

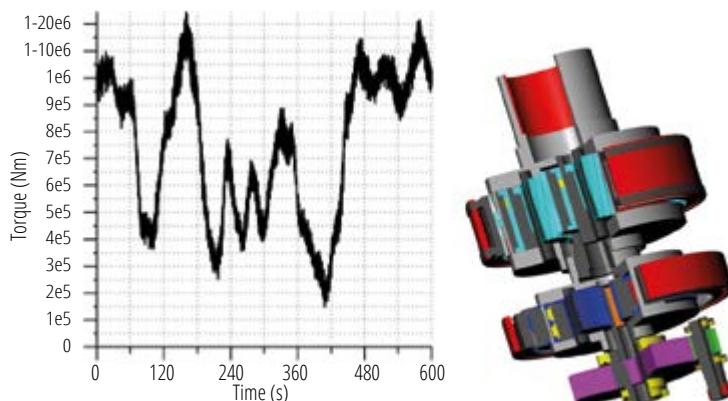
Oggi l'analisi dei sistemi di trasmissione viene eseguita con opportuni software, come KISSsoft [12] che consente di modellare l'intero sistema di trasmissione con tutti gli elementi principali. Normalmente la serie temporale viene misurata all'ingresso o all'uscita dell'accoppiamento. La gestione di una serie temporale per un sistema di trasmissione può essere effettuata in due modi diversi.

- La "variante semplice" utilizza lo stesso spettro di carico per ciascun elemento della trasmissione
- La "variante generale" genera spettri di carico individuali per i diversi elementi (come ingranaggi, alberi, cuscinetti) e per ogni stadio della trasmissione

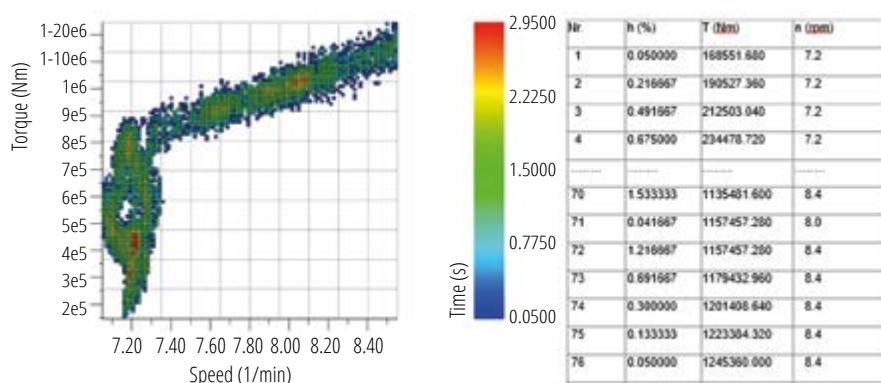
## Uso delle serie temporali per sistemi di trasmissione con la "variante semplice"

Uno spettro di carico di tipo A (tabella 2) deve essere definito all'ingresso o all'uscita del sistema, nel punto in cui è stata misurata la serie temporale. Questo spettro di carico viene quindi utilizzato in tutto il sistema di trasmissione per tutti gli ingranaggi, gli alberi e i cuscinetti. A questo scopo è preferibile che coppia e velocità nello spettro di carico siano fornite come fattori da moltiplicare con i valori nominali (figura 6). Il software per sistemi di trasmissione calcolerà la velocità/la coppia nominale dei singoli elementi e lo stesso spettro di carico, se definito con i fattori, potrà essere utilizzato ovunque.

La "variante semplice" può essere utilizzata con qualsiasi software per sistemi di trasmissione che consenta l'uso di spettri di carico senza ulteriori adattamenti. Se la coppia e la velocità della serie temporale sono sempre positive, o se alcuni valori



**Figura 8.** Serie temporale misurata durante la fase di produzione dell'energia di una turbina eolica



**Figura 9.** Coppia - Risultato del metodo del "conteggio semplice", distribuzione coppia-velocità con indicazione della durata in secondi (a sinistra) e riepilogo dello spettro (a destra)

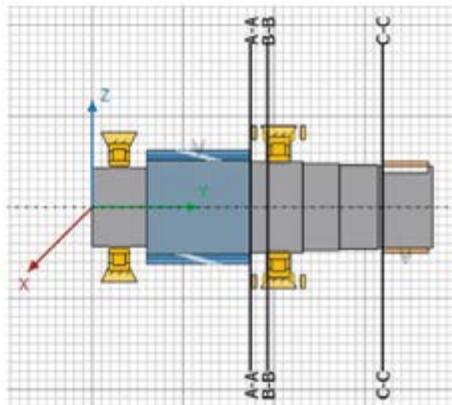
Rainflow half-matrix with 10 bins Number of events 266											
	Tmin from:	101	189	277	365	453	541	629	717	805	893 (Nm)
	Tmin to:	189	277	365	453	541	629	717	805	893	982 (Nm)
Tmax from (Nm):	Tmax to (Nm):										
101	189	60									
189	277	6	8								
277	365	1	0	15							
365	453	0	0	6	30						
453	541	2	0	1	5	19					
541	629	0	0	1	1	8	41				
629	717	0	0	1	0	0	5	10			
717	805	0	0	0	0	1	0	7	12		
805	893	0	0	2	0	0	0	2	3	12	
893	982	1	0	0	0	0	0	0	0	1	6

**Figura 10.** Semi-matrice Rainflow, la maggior parte dei 1512 eventi (variazioni di coppia) trovati si trova sulla diagonale della matrice, dove le ampiezze ( $\max - \min$ )/2 sono basse

negativi poco frequenti possono essere trascurati, è preferibile utilizzare questo metodo. I risultati per ingranaggi e cuscinetti saranno perfetti utilizzando lo spettro di carico di tipo A. Per un calcolo di verifica accurato degli alberi andrebbero sempre utilizzati spettri di carico di tipo B, altrimenti la resistenza dell'albero non sarà precisa.

Spesso la resistenza dell'albero non è un aspetto critico. L'uso di spettri di carico di tipo A – ipotizzando torsione e taglio pulsanti per il calcolo di verifica degli alberi – produrrà risultati conservativi (con ampi margini di sicurezza). Pertanto, se i risultati sono soddisfacenti, non è necessario un'analisi più complessa.

N.	$\eta$ (%)	T (Nm)	n (rpm)	$R_{ShaftCone}$	$R_{Bearing}$	$R_{Pinion}$	$R_{Bearing}$
1	0.528751	256454.400	7.5	0.572	-1.000	0.572	-1.000
2	0.594845	256454.400	7.5	0.790	-1.000	0.790	-1.000
3	0.462657	311393.600	7.5	0.471	-1.000	0.471	-1.000
...	...	...	...	...	...	...	...
66	1.057502	1190420.800	7.5	0.862	-1.000	0.862	-1.000
67	1.718440	1190420.800	7.5	0.908	-1.000	0.908	-1.000
68	0.396563	1190420.800	7.5	0.954	-1.000	0.954	-1.000
69	0.066094	1245360.000	7.5	0.118	-1.000	0.118	-1.000
70	0.066094	1245360.000	7.5	0.250	-1.000	0.250	-1.000
71	0.462657	1245360.000	7.5	0.824	-1.000	0.824	-1.000
72	0.396563	1245360.000	7.5	0.868	-1.000	0.868	-1.000



**Figura 11.** Spettro per il calcolo di verifica dell'albero (a sinistra) e rappresentazione dell'albero veloce con indicazione delle sezioni critiche (a destra)

Nominal load calculation		RESULTS		GEARS	
Open module without CA		SF [-]	SH [-]		
L		Pair 1		2.7508	1.2207 Drive side
2		Pair 2		3.3515	1.3314
3		Pair 3		2.3177	1.0603
<b>RESULTS</b>					
Open module		SD [-]	SG [-]	max deflection [µm]	
7		Shaft1	1.7978	3.7592	64.65
3		Shaft2	1.5853	2.1045	45.952
3		Shaft3	2.0954	2.5136	41.139
3		Shaft4	1.5912	1.7986	11.814
RESULTS		BEARINGS			
Open module		Uh [N]	50 [-]		
7		6268.9	7.2705		
3		5965.2	3.7746		
3		7367.4	3.0969		
3		25505.8211	2.8601		

**Figura 12.** Panoramica dei risultati del calcolo di verifica della turbina eolica

### Uso delle serie temporali per sistemi di trasmissione con la “variante generale”

Se le serie temporali contengono coppie/velocità positive e negative, allora si generano variazioni di carico alternato che sono molto sensibili per i calcoli di verifica della resistenza. Per gli ingranaggi devono essere utilizzati spettri di carico di tipo C, per gli alberi di tipo B e per i cuscinetti di tipo A, il che significa che per il calcolo di un albero, di un ingranaggio o di un cuscinetto deve essere utilizzato uno spettro di carico diverso. Per complicare ulteriormente le cose, lo spettro di carico per ciascuna coppia di ingranaggi deve essere prodotto separatamente. Questo verrà spiegato nel paragrafo a seguire.

La gestione di serie temporali con coppie/velocità positive e negative nei sistemi è molto complessa e richiede adattamenti specifici nel software per sistemi di trasmissione. Se, ad esempio, la serie temporale è fornita per l'accoppiamento in ingresso del sistema, allora per ciascuna coppia di ingranaggi deve essere noto il rapporto r tra l'accoppiamento in ingresso

e il pignone della coppia. La serie temporale (fornita per l'accoppiamento in ingresso) viene quindi adattata rispetto al pignone moltiplicando la coppia per r e riducendo la velocità per r. Questa serie temporale modificata viene quindi utilizzata per generare lo spettro di carico per il calcolo di verifica degli ingranaggi. La stessa procedura può essere ripetuta per alberi e cuscinetti (figura 7).

Per i soli alberi e cuscinetti è inoltre possibile, e più semplice, generare lo spettro di carico di tipo A e di tipo B nella posizione di applicazione della serie temporale. Il calcolo di sistema dovrà poi essere eseguito due volte, una volta con lo spettro di carico di tipo A per tutti i calcoli di verifica dei cuscinetti, poi con il tipo B per gli alberi.

### Uso delle serie temporali per sistemi di trasmissione con diversi treni di ingranaggi

Come accennato in precedenza, lo spettro di carico nelle applicazioni dei sistemi di trasmissione deve essere prodotto separatamente per ogni coppia di ingranaggi quando una serie temporale presenta cop-

pie/velocità con valori positivi e negativi, dato che il carico sul singolo dente dell'ingranaggio va considerato per i calcoli di verifica come spiegato nel capitolo 2.1 (figura 1). Normalmente la frequenza di variazione della coppia da positiva a negativa,  $f_{Torque}$ , è molto più piccola della frequenza di velocità di rotazione del pignone,  $f_{Speed}$ : supponiamo quindi che  $f_{Torque} = 0,25 \text{ Hz}$  (la coppia cambia ogni 4 secondi) e che la velocità di rotazione del pignone, primo stadio, sia  $f_{Speed} = 10 \text{ Hz}$  (600 giri al minuto). In questo caso un dente del pignone avrà, nel giro di 4 secondi, 40 volte un carico positivo, poi una variazione di carico, quindi 40 volte un carico negativo. Pertanto, lo spettro di carico conterrà il 2,4% di cicli alternati e il resto sarà costituito da cicli pulsanti.

Il pignone del secondo stadio avrà ancora  $f_{Torque} = 0,25 \text{ Hz}$  ma, a causa della riduzione del primo stadio (supponiamo  $i = 5$ ), la velocità di rotazione sarà  $f_{Speed} = 2 \text{ Hz}$  (120 giri al minuto). Quindi il dente di questo pignone avrà, nel giro di 4 secondi, solo 8 volte un carico positivo, poi una variazione di carico, quindi 8 volte un carico negativo. Lo spettro di carico conterrà quindi l'11,1% di cicli alternati e il resto sarà costituito da cicli pulsanti.

Poiché i cicli di carico alternati sono più dannosi dei cicli pulsanti, lo spettro di carico del secondo stadio è diverso e chiaramente più dannoso rispetto allo spettro di carico del primo stadio (figura 7).

### Applicazione del metodo a un riduttore di turbina eolica

La figura 8 mostra solo i primi 600 secondi di una serie temporale durante la fase di produzione dell'energia di una turbina eolica. La coppia varia in modo significativo tra 146 e 1245 kNm, e la velocità è bassa, quasi costante nell'intervallo compreso tra

7,0 e 8,6 giri al minuto, motivo per cui questa è detta anche "velocità di cut-in". Dato che la coppia è sempre positiva, vi è sempre un dente di un ingranaggio sottoposto a una sollecitazione pulsante. Pertanto, per la generazione dello spettro di carico ai fini del calcolo di verifica degli ingranaggi e dei cuscinetti viene utilizzato il metodo del "conteggio semplice". La risultante distribuzione di coppia-velocità è mostrata nella figura 9.

Lo spettro di carico contiene bin con diversi valori di coppia e velocità. In un software per sistemi di trasmissione [12] lo spettro è attribuito all'accoppiamento in ingresso (sull'albero della turbina) e poi automaticamente adattato e distribuito a tutti gli elementi del sistema di trasmissione.

Per il calcolo di verifica degli alberi, è raccomandata un'analisi specifica del numero di cicli con ampiezze maggiori. La variazione di coppia (figura 8) della serie temporale è generalmente bassa, pochissime volte si verifica un passaggio da coppia alta a coppia bassa. Ciò è evidente anche nel riempimento degli eventi mostrato dalla semi-matrice Rainflow (figura 10). Pertanto, l'albero non è sottoposto a molte ampiezze significative di sollecitazioni di torsione. Se, come accennato in precedenza, si ipotizza una

sollecitazione di torsione pulsante, la sicurezza risulterà inferiore. L'uso di un'analisi Rainflow fornisce un risultato più preciso. Lo spettro di carico ottenuto (figura 11) viene quindi applicato all'accoppiamento in ingresso e utilizzato per tutti i calcoli di verifica degli alberi.

Per un corretto calcolo di verifica, in ogni albero del riduttore devono essere designate alcune sezioni critiche (in corrispondenza di spallamenti, scanalature per lingue, ecc.) (figura 11). Il calcolo di verifica viene eseguito per tutte le sezioni e viene individuata quella più critica. Nella panoramica dei risultati (figura 12) per ogni albero vengono mostrate la sicurezza per la resistenza statica e la sicurezza per la resistenza a fatica nella sezione più critica. Questo, combinato con i fattori di sicurezza a flessione e a pitting per tutte le coppie di ingranaggi, fornisce una buona panoramica dei principali parametri di resistenza della turbina eolica.

## Conclusione

Il metodo trattato è quello con cui i dati di coppia-velocità forniti all'accoppiamento in ingresso o in uscita di un sistema di trasmissione possono essere convertiti in uno spettro di carico specifico per la valutazio-

ne di ogni ingranamento, cuscinetto e albero del sistema. La procedura da applicare a questi elementi varia a seconda di come agisce il carico. Il dente di un ingranaggio è sottoposto a carico pulsante, quindi, se la coppia non diventa mai negativa, non si verificano sollecitazioni alternate. La sfera di un cuscinetto è sempre sottoposta a carico pulsante, indipendentemente dalle coppie positive o negative. Un albero in rotazione è sempre sottoposto a sollecitazioni di flessione alternate, ma le ampiezze delle sollecitazioni di torsione sono normalmente ridotte se la coppia varia lentamente (rispetto alla velocità di rotazione), quindi spesso la sollecitazione di torsione è meno dannosa.

Pertanto, la conversione dei dati di una serie temporale in uno spettro di carico viene effettuata con metodi diversi per ingranaggi, cuscinetti e alberi; inoltre, il metodo deve essere adattato se la coppia varia da positiva a negativa.

Nella seconda parte dell'articolo si spiega il metodo di verifica con spettri di carico per alberi e cuscinetti. Questi metodi non sono ancora coperti dalle norme ISO, quindi il calcolo di verifica dei cuscinetti è basato sulla letteratura e il calcolo di verifica degli alberi sulla documentazione FKM. ●

## Bibliografia

- [1] Kissling, U., 2021, "Use of duty cycles or measured torque-time data with AGMA ratings", 21FTM07, Fall Technical Meeting 2021. Pubblicato anche in Gear Technology, edizione nov./dic. 2022, pp.48-54.
  - [2] ISO 6336-1,2,3:2019, "Calculation of load capacity of spur and helical gears".
  - [3] ISO 6336-6:2019, "Calculation of service life under variable load".
  - [4] AGMA 2001-D04:2004, "Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth".
  - [5] Direttiva FKM, 7a edizione, 2020, "Analytical Strength Assessment of Components in Mechanical Engineering".
  - [6] Amzallag, C., Gerey, J.P., Robert, J.L., Bahuaud, J. Standardization of the rainflow counting method for fatigue analysis. Int J Fatigue 1994, 16:287–93, [https://doi.org/10.1016/0142-1123\(94\)90343-3](https://doi.org/10.1016/0142-1123(94)90343-3)
  - [7] ISO 12110-2:2013, "Metallic materials — Fatigue testing — Variable amplitude fatigue testing — Part 2: Cycle counting and related data reduction methods".
  - [8] DIN 743-4, 2012, Calculation of load capacity of shafts and axles – Part 4: Fatigue limit, endurance limit – Equivalently damaging continuous stress.
  - [9] Winter, H.; Niemann, G., 2019, Machine elements vol.1, 5.edition, ISBN 978-3-662-55482-1, casa editrice Springer.
  - [10] <https://www.skf.com/group/products/rolling-bearings/principles-of-rolling-bearing-selection/bearing-selection-process/bearing-size/size-selection-based-on-rating-life/bearing-rating-life>
  - [11] ISO/TS 16281:2008, "Rolling bearings — Methods for calculating the modified reference rating life for universally loaded bearings".
  - [12] Software KISSsoft di calcolo ingranaggi, 2023, [www.KISSsoft.com](http://www.KISSsoft.com).
  - [13] AGMA 6001-F19, "Design and Selection of Component for Enclosed Gear Drives".
- Articolo tratto da una relazione presentata all'AGMA FTM 2023 e stampato con l'autorizzazione dell'American Gear Manufacturers Association, proprietaria dei diritti d'autore.  
American Gear Manufacturers Association, 1001 N. Fairfax Street, 5th Floor, Alexandria, Virginia 22314.  
Le dichiarazioni e le opinioni espresse in questo testo sono quelle degli autori e non sono da considerarsi ufficiali dell'American Gear Manufacturers Association.  
Si ringrazia l'AGMA per la gentile autorizzazione alla pubblicazione (NdR).*