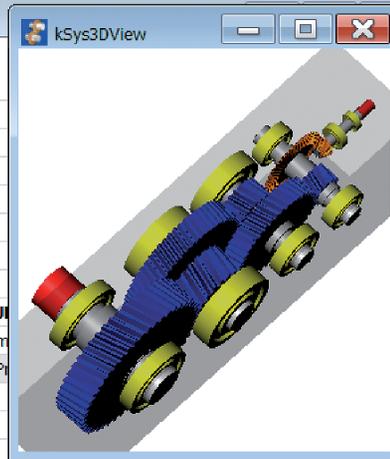


Vom Sicherheitsfaktor zur Überlebenswahrscheinlichkeit – Teil 1

UserInterface				
A	B	C	D	E
1		RESULTS	KINEMATICS	
2	Coupling:	Shaft1	Shaft5	Total ratio
3	Speed [rpm]	1000	10.038	99.625
4	Torque [Nm]	100	-9376.7	Total efficiency
5	Power [kW]	10.472	-9.8561	94.12 %
6	Type of Power	Input	Output	
7	Dir. of Rotation	Clockwise	Clockwise	
8				
9	Nominal load calculation	RESULTS	GEARS	RESU
10	<i>Open module without CA</i>	SF [-]	SH [-]	Est. m
11	Pair1	1.5906	0.91001	Drive side
12	Pair2	4.5819	1.3145	
13	Pair3	2.5886	1.3515	
14	Pair4	2.6962	1.482	
15				
16		RESULTS	SHAFTS	RESULTS
17	<i>Open module</i>	SD [-]	SS [-]	max deflection [um]
18	Shaft1	1.0905	2.1602	136.16
19	Shaft2	7.9044	11.637	30.174
20	Shaft3	3.8053	8.8695	88.839
21	Shaft4	3.1293	5.5695	132.32
22	Shaft5	2.0996	2.8166	95.153
				Lh [h]
				fs [-]
				3294.8
				171933.6849
				49248.90945
				41243.57094
				46978.76985
				5.1413
				14.86
				3.6595
				2.9701
				2.2314



01 Ergebnisse der Festigkeitsberechnung eines Getriebes in Kisssoft

In verschiedenen Branchen der Antriebstechnik wird heute vermehrt der Nachweis der Systemzuverlässigkeit von Anlagenkomponenten wie Getriebe oder Komplettanlagen verlangt. An sich ist die Angabe der Zuverlässigkeit einer Komponente nicht etwas grundsätzlich anderes als die Angabe des Sicherheitsfaktors oder der rechnerischen Lebensdauer. Über die Zuverlässigkeit einzelner Bauteile lässt sich jedoch einfach die Zuverlässigkeit des mechanischen Systems in seiner Gesamtheit bestimmen.

Die Angabe der Zuverlässigkeit ist klarer zu deuten für den mechanischen Laien als eine Liste von Sicherheitsfaktoren. Eine Aussage wie „Die Wahrscheinlichkeit, dass Getriebe X während der garantierten Lebensdauer von 50 000 h ausfällt, ist kleiner als 0,02 %“ ist viel besser verständlich als „Die Sicherheitsfaktoren aller Zahnräder in Getriebe X, berechnet für eine Betriebsdauer von 50 000 h, sind alle > 1,6“, obwohl beide Aussagen dasselbe ausdrücken.

In diesem Artikel wird beschrieben, wie für die Getriebekomponenten (Wellen, Lager, Zahnräder) aus der rechnerischen Lebensdauer nach Norm die Ausfallwahrscheinlichkeitskurven nach dem Weibull-Kriterium ermittelt werden. Die Methode kann auf alle Normberechnungen nach ISO, DIN oder AGMA angewendet werden, welche mit Woehlerlinien arbei-

ten. Berechnungen können mit Nennbelastung oder mit Lastkollektiven durchgeführt werden.

Zur Ermittlung der Systemzuverlässigkeit werden die Getriebeelemente nach Lebenswichtigkeit klassiert: Bewirkt das Versagen eines Elementes direkt den Getriebeausfall? Gibt es Redundanzen? Damit kann dann durch mathematische Kombination der Komponentenzuverlässigkeit die Systemzuverlässigkeit bestimmt werden.

Festigkeitsberechnung von mechanischen Komponenten

Seit langem – und vermehrt seit Beginn des 20. Jahrhunderts – waren Ingenieure danach bestrebt, Regeln zu entwickeln, um eine Festigkeitsabschätzung von Maschinenbau-Elementen durchführen zu kön-

Dr.-Ing. Ulrich Kissling ist CEO und Dr.-Ing. Michael Stangl ist Entwickler; beide bei der KisoSoft AG in Bubikon, Schweiz

nen. Insbesondere deutsche Ingenieure versuchten durch die Kombination von Grundformeln der Mechanik mit Erfahrungswerten und Versuchen Berechnungsregeln zu entwickeln, mit welchen Bauteile ausgelegt werden konnten. Diese Vorgehensweise ist bis heute äußerst erfolgreich und hat sich weltweit durchgesetzt. Dies ist auch daran ersichtlich, dass alle bis heute publizierten Berechnungsnormen der ISO auf diesem Prinzip basieren.

In der Regel wurden Berechnungsmethoden für mechanische Bauteile von verschiedenen Spezialisten an unterschiedlichen Hochschulen entwickelt. Allen Festigkeitsmethoden ist gemein, dass aufgrund der angreifenden Last die resultierenden Spannungen bestimmt und diese in Relation zur zulässigen Beanspruchung gesetzt werden. Ansonsten ist die Vorgehensweise zur Berechnung je nach Maschinenelement (wie Wälzlager, Welle, Zahnrad oder Schraube) äußerst unterschiedlich.

Der unterschiedliche Aufbau der Rechenmethoden je nach Bauteil ist ein Problem, welches aus dieser historischen Entwicklung entstanden ist. Eigentlich könnte erwartet werden, dass die resultierende Sicherheit einer Nachrechnung, wenn die zulässige Belastung durch die auftretende Spannung geteilt wird, als Aussage genügt – und somit eine Sicherheit über 1,0 bedeutet, dass das Bauteil ausreichend dimensioniert ist. Dies ist leider nicht so. Bei Wälzlagern wird keine Sicherheit, sondern eine Lebensdauer bestimmt. Bei einer Zahnradberechnung nach ISO werden Sicherheiten für Zahnfuß und Flanke bestimmt; hier fragt sich, welches der beiden Kriterien wann entscheidend ist. Zudem wird empfohlen, für den Zahnfuß eine Mindestsicherheit von 1,4 – für die Flanke hingegen 1,0 – zu verwenden. Es gibt eine Begründung, weshalb unterschiedliche Mindestsicherheiten verlangt werden: Ein Zahnbruch führt zu einem sofortigen Ausfall des Getriebes – Grübchenbildung auf der Flanke hingegen nicht. Bei Wellenberechnungen nach FKM wird die zu erreichende Mindestsicherheit abhängig gemacht von der Wichtigkeit des Bauteils, das heißt von den Konsequenzen eines möglichen Wellenbruchs, was sicher sinnvoll ist. Bei der Fressberechnung von Zahnradern wird eine Mindestsicherheit von 2.0 verlangt, diesmal, weil die Rechenmethode als „noch nicht genügend geprüft“ beurteilt wird. Bei einer Schraubenberechnung nach VDI wird für die Sicherheit gegen Gleiten der verschraubten Teile je nach Belastungsfall eine Mindestsicherheit von 1,2 bis 1,8 verlangt. Die Aufzählung kann beliebig weitergeführt werden. Das Fazit ist: Sicherheit ist – je nach Bauteil – nicht gleich Sicherheit.

The image shows three screenshots of software output tables. The first, 'HighestDamage', shows a summary of damage for different components across five rows. The second, 'BearingsDamage', provides a detailed breakdown of damage for bearings across five rows. The third, 'GearsDamage', shows damage data for gears across five rows. Each table includes columns for component names and numerical damage values.

02 Angabe der Schädigung aller wichtigen Elemente eines Getriebes in Kissys

Bin No.	Häufigkeit [%]	Leistung [kW]	Drehzahl [1/min]	Drehmoment [Nm]	Schädigung, bezogen auf die Soll-Lebensdauer (20 000 h)				
					No.	F1 %	F2 %	H1 %	H2 %
1	0,00020	175.0000	440,8	3 791,1	1	0,08	0,04	0,00	0,00
2	0,00160	172.0250	440,8	3 726,6	2	0,54	0,30	0,03	0,01
3	0,02800	166.2500	440,8	3 601,5	3	7,25	3,97	0,41	0,12
4	0,27200	158.9000	440,8	3 442,3	4	49,86	26,45	3,02	0,87
5	2,00000	150.1500	440,8	3 252,7	5	27,25	121,40	9,58	2,54
6	9,20000	141.4000	440,8	3 063,2	6	6,35	35,48	16,63	4,41
7	28,00000	132.6500	440,8	2 873,6	7	0,00	4,53	17,96	4,77
8	60,49820	123.9000	440,8	2 684,1	8	0,00	0,00	13,26	3,52
Σ						91,33	192,18	60,89	16,24

Tabelle 01: Lastkollektiv (I.) und Darstellung der Schädigung pro Lastkollektiv-Element je für Zahnfuß (F1: Ritzel, F2: Rad) und Flanke (H1: Ritzel, H2: Rad); Soll-Lebensdauer ist 20 000 h; die erreichbare Lebensdauer des Zahnrades beträgt 10 400 h (Zahnfuß des Rades); deshalb dann die rechnerische Schädigungssumme von 192 %

Rechenmethode	Schadenswahrscheinlichkeit F _o			
	1 %	10 %	Andere	Kommentar
Welle, DIN743			2,5 %	Angenommen, ist nicht dokumentiert
Welle, FKM-Richtlinie			2,5 %	
Welle, AGMA6001	■			Falls kC = 0,817
Wälzlager, ISO281		■		Falls Faktor a1 = 1,0
Zahnflanke, ISO6336; DIN3990	■			
Zahnfuß, ISO6336; DIN3990	■			
Zahnflanke, AGMA2001	■			Falls Zuverlässigkeitsfaktor KR = 1
Zahnfuß, AGMA2001	■			Falls Zuverlässigkeitsfaktor KR = 1

Tabelle 02: Festgelegte Schadenswahrscheinlichkeit von verschiedenen Rechenmethoden bei der Bestimmung der Werkstoffkennwerte

	Faktor f_{tB}	Weibull-Formparameter β
Wellen	0.7...0.9 (0.8)	1.1...1.9 (1.5)
Kugellager	0.1...0.3 (0.2)	1.1
Rollenlager	0.1...0.3 (0.2)	1.35
Zahnflanke	0.4...0.8 (0.6)	1.1...1.5 (1.5)
Zahnfuß	0.8...0.95 (0.875)	1.2...2.2 (1.8)

Tabelle 03: Faktoren für Weibull-Verteilung nach Bertsche; in Klammern empfohlene Werte

Berechnung der Faktoren für die Bestimmung der Zuverlässigkeit R(t) nach B. Bertsche mit Weibull-Verteilung: $R(t) = 100 \times \text{Exp}(-((t \times \text{fac} - t_0)/(T - t_0))^{\beta})$ %; t in Stunden (h)						
Rad		fac	b	t_0	T	R(H) %
1	Zahnfuß	1000	1,7	1,667e+007	2,562e+007	82,99
1	Zahnflanke	1000	1,3	3,543e+007	1,688e+008	100,00
2	Zahnfuß	329	1,7	2,416e+006	3,713e+006	0,07
2	Zahnflanke	329	1,3	3,826e+007	1,823e+008	100,00

Zuverlässigkeit der Konfiguration bei Soll-Lebensdauer (%): 0,06 (Bertsche)

Tabelle 04: Ausgabe der Faktoren für die Weibull-Gleichung zur Berechnung der Zuverlässigkeit

Formelzeichen		
R	Zuverlässigkeit (der einzelnen Komponente)	%
R_s	Zuverlässigkeit des Systems	%
t	Lastwechselzahl	
t_0	Versagensfreie Anzahl Lastwechsel (während der ersten t_0 Lastwechseln tritt kein Versagen auf)	
T	Charakteristische Lebensdauer (in Lastwechseln) bei 63,2 % Ausfallwahrscheinlichkeit (36,8 % Zuverlässigkeit)	
fac	Anzahl Lastwechsel pro Stunde (Umrechnung von Betriebsstunden in Lastwechsel)	1/h
β	Weibull-Formparameter	
f_{tB}	Faktor (s. Tabelle 3)	
H_{att}	Erreichbare Lebensdauer des Bauteils (in Stunden)	h
H_{att10}	Erreichbare Lebensdauer des Bauteils bei 10 % Ausfallwahrscheinlichkeit	h
F_o	Spezifische Schadenswahrscheinlichkeit (bei Berechnung H_{att} , s. Tabelle 02)	%

Die Beurteilung des Resultates einer Nachrechnung ist deshalb anspruchsvoll und setzt Kenntnisse der Rechenmethode sowie der anzusetzenden Mindestsicherheiten voraus. **Bild 01** zeigt in Kissys [1] das Ergebnis der Festigkeitsberechnung von allen wichtigen Bauteilen eines 4-stufigen Kegel-Stirnrad-Getriebes. Die Darstellung der Resultate ist übersichtlich; trotzdem ist es unmöglich, auch für den erfahrenen Spezialisten, auf den ersten Blick zu erkennen:

- ob das Getriebe bezüglich Nenndrehmoment (100 Nm) und Soll-Lebensdauer (5000 h) ausreichend dimensioniert ist und
- welches der Bauteile das schwächste Glied im Getriebe ist und gegebenenfalls verstärkt werden müsste.

Beim Getriebe von Bild 01 stellt sich z.B. die Frage, ob das kritischste Wälzlager (auf der Antriebswelle 'Shaft1') mit nur 3300 h Lebensdauer oder die ungenügende Flankensicherheit des Kegelradpaars ('Pair1' mit nur 0,91 Sicherheitsfaktor) gravierender ist und zu einem vorzeitigen Ausfall führen kann. Dabei muss noch beachtet werden, dass sich die Flankensicherheit proportional zum Quadrat des Drehmoments verhält. Bei einer Reduktion des Nenndrehmomentes von 100 auf 88 Nm erhöht sich die Flankensicherheit in diesem Fall nur von 0,91 auf 0,96 - die Lebensdauer des kritischsten Lagers hingegen von 3300 auf 5100 h. Das Kegelradpaar ist somit das schwächste Bauteil in diesem Getriebe.

Bestimmung von Lebensdauer & Co.

Bei allen Rechenmethoden, welche die zulässige Belastung über die Woehlerlinie des Werkstoffs definieren, lässt sich die erreichbare Lebensdauer bestimmen. Dies ist somit bei allen Zahnrad- und Wälzlager-Berechnungen möglich. Bei der Wellenberechnung kann in der neuesten Ausgabe der DIN 743 (2012) [2] und bei der FKM-Richtlinie [3] mit Woehlerlinien gerechnet werden; bei AGMA 6001 [4] hingegen ist dies nur eingeschränkt möglich. Zur Berechnung muss neben der Belastung auch die Mindestsicherheit vorgegeben werden. Die Lebensdauer wird dann bezüglich dieser Mindest- oder Soll-Sicherheit bestimmt. Damit können die berechneten Lebensdauer-Werte der verschiedenen Bauteile direkt miteinander verglichen werden; das Element mit der tiefsten Lebensdauer ist das schwächste Glied im Getriebe.

Eine aus der Lebensdauer abgeleitete und vor allem bei Lastkollektiven praktische Kenngröße ist die Schädigung eines Bauteils (engl.: *damage*). Die Schädigung ist gleich dem Verhältnis der Soll-Lebensdauer zur erreichbaren Lebensdauer. Die Zunahme der Schädigung eines Bauteils verhält sich somit proportional zur Zeit (Lastwechselzahl). **Bild 02** zeigt das Resultat einer Stirnradpaarung mit einem Belastungskollektiv. Die Angabe der Schädigung pro Schadenskriterium (Fuß/Flanke, Ritzel/Rad) und pro Lastkollektivelement zeigt klar, welches das dominierende Schadenskriterium und welches das am meisten schädigende Lastkollektivelement ist.

Die Zusammenfassung der Resultate einer Getriebeberechnung durch Angabe der Schädigung aller wichtigen Bauteile (**Tabelle 01**) erlaubt direkt und rasch die Schwachstellen im Getriebe zu lokalisieren und das Gesamtergebnis zu erhalten: und zwar, ob das Getriebe die Anforderung erfüllt (keine der Einzelschädigungen ist größer 100 %) oder nicht. Verglichen mit der zuvor besprochenen üblichen Darstellung (Bild 01) sind die Angaben bei Verwendung der Schädigungen einheitlicher (keine Sicherheitsfaktoren bei Zahnradern und keine Lebensdauer-Werte bei Wälzlagern), zudem sind unterschiedlich vorgegebene Mindestsicherheiten im Resultat bereits integriert, und müssen somit nicht zusätzlich berücksichtigt werden beim Vergleich der Ergebnisse.

In letzter Zeit wird in Festigkeitsberechnungen auch die sogenannte Auslastung (engl.: *exposure*) bestimmt; z.B. in der FKM-Richtlinie [3] für Wellen oder im Entwurf einer ISO-Norm für Flankenbruch. Die Auslastung ist an sich der Kehrwert des rechnerischen Sicherheitsfaktors, beinhaltet aber bereits die erforderliche Mindestsicherheit. Die Auslastung ist somit proportional zur Last, und kann deshalb nicht proportional zur Schädigung sein. Da Last

und Lebensdauer durch die logarithmische Woehlerlinie verknüpft sind, wird eine Erhöhung der Auslastung um 10 % – je nach Neigung der Woehlerlinie – eine Erhöhung der Schädigung um 100 % und mehr bewirken. Bei einer eher belastungsorientierten Betrachtung der Resultate kann die Verwendung der Auslastung der Schädigung vorgezogen werden.

Ausfallwahrscheinlichkeit von Maschinenelementen

Die Verwendung der Schädigung als Kriterium, um die Zuverlässigkeit von Getriebekomponenten zu quantifizieren, scheint das perfekte Instrument zu sein, um eine Aussage zur Lebensdauer von Getriebekomponenten zu machen. Dabei gibt es jedoch ein Problem: Werkstoffkennwerte wie die Woehlerlinie werden mit Proben gemessen, die Messresultate streuen. Um einen Kennwert für die Berechnung zu erhalten, wird üblicherweise angenommen, dass die Messwerte einer Normalverteilung entsprechen. Dann wird, wiederum unterschiedlich je nach Methode, festgelegt, für welche Schadenswahrscheinlichkeit die bei der Berechnung verwendeten Festigkeitswerte gelten (**Tabelle 02**).

Ein mit Ausfallwahrscheinlichkeit 90 % bestimmter Werkstoffkennwert ist höher als ein mit 99 % bestimmter. Somit ergibt sich bei Anwendung der 90 % Ausfallwahrscheinlichkeit ein höherer Sicherheitsfaktor und eine höhere rechnerische Lebensdauer des Bauteils und somit eine kleinere Schädigung bei Soll-Lebensdauer. So können Schädigungen, berechnet mit Methoden, welche unterschiedliche Ausfallwahrscheinlichkeiten vorschreiben, auch nicht direkt verglichen werden. Die berechneten Schädigungen sind auch keine exakten Werte, sondern – wegen der Werkstoffkennwert-Streuung und anderer Effekte, welche in der Rechenmethode nicht berücksichtigt sind – einer statistischen Streuung unterworfen. Ein Getriebeausfall kann entstehen, weil ein anderes Bauteil als das kritischste verfrüht bricht – dies kommt in der Praxis häufig vor.

Bei der Angabe einer erreichbaren Lebensdauer (bzw. einer Schädigung bei Soll-Lebensdauer) müsste deshalb gleichzeitig die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben werden. Wenn nun aus Versuchen statistische Parameter wie z. B. die Streuung der Resultate bei Normalverteilung bestimmt werden, kann auf Basis der rechnerisch bestimmten Lebensdauer mit statistischem Ansatz eine Versagenswahrscheinlichkeit in Funktion der Zeit ermittelt werden. Das Gegenteil der Versagenswahrscheinlichkeit ist die Zuverlässigkeit (engl.: *reliability*). Da bei diesem Ansatz die der Rechenmethode inhärente Ausfallwahrscheinlichkeit (Tabelle 02) berücksichtigt ist, können nun berechnete Zuverlässigkeitswerte verschiedener Bauteile bei Soll-Lebensdauer effektiv miteinander verglichen werden.

Die Zuverlässigkeit wird in Prozent von 0 bis 100 angegeben und hat auch einen psychologisch wichtigen Nebeneffekt, denn Sicherheitsfaktoren vermitteln den Eindruck, absolute Werte zu sein: Ein Getriebe mit hohen Faktoren kann nicht versagen. Eine Darstellung desselben Resultats als Zuverlässigkeit, auch wenn sie 99,99 % ist, zeigt hingegen immer, dass eine Restunsicherheit bleibt.

Bestimmung der Zuverlässigkeit

Die Berechnung der Zuverlässigkeit wird noch nicht verbreitet verwendet. Allerdings besteht ein zunehmendes Interesse, da bspw. im Windenergie-Bereich eine Nachfrage nach einer Aussage zur Systemzuverlässigkeit besteht [5]. Es gibt auch keine Norm im

Maschinenbau, welche eine solche Regel enthält. Eine klassische Quelle für diese Berechnung ist das Werk von Bertsche [6], in welchem die möglichen Verfahren ausführlich beschrieben werden. In diesem Beitrag wird deshalb auf die Besprechung der verschiedenen Methoden verzichtet. Am üblichsten und gut angepasst an die aus klassischen Maschinenbauberechnungen erhältlichen Resultate ist die sogenannte „Weibull-Verteilung“. Bertsche empfiehlt hier die Verwendung der Drei-Parameter-Weibull-Verteilung. Die Zuverlässigkeit R eines Maschinenelements in Abhängigkeit der Lastwechselzahl t wird nach **Gleichung 1** berechnet.

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-t_0}{T-t_0}\right)^\beta} \cdot 100\% \tag{1}$$

Die Parameter T und t₀ lassen sich aus der rechnerisch erreichbaren Lebensdauer H_{att} des Bauteils wie folgt bestimmen (mit F_o entsprechend Rechenmethode, Tabelle 02, β und f_{IB} aus **Tabelle 03** nach Bertsche):

$$T = \left(\frac{H_{att} - f_{IB} \cdot H_{att10}}{\beta \sqrt{-\ln\left(1 - \frac{F_o}{100}\right)}} + f_{IB} \cdot H_{att10} \right) \cdot fac \tag{2}$$

$$t_0 = f_{IB} \cdot H_{att10} \cdot fac \tag{3}$$

mit

$$H_{att10} = \frac{H_{att}}{(1 - f_{IB}) \cdot \sqrt{\frac{\ln\left(1 - \frac{F_o}{100}\right)}{\ln(0,9)}} + f_{IB}} \tag{4}$$

Mit der Gleichung (1) für R(t) kann nun der Verlauf der Zuverlässigkeit in Abhängigkeit der Zeit (oder Zyklenzahl) grafisch dargestellt werden. Die Berechnung der Lastwechselwerte t₀ und T kann einfach im Anschluss an eine Lebensdauerberechnung erfolgen. Dazu werden die **Gleichungen (2) bis (4)** unter Verwendung der erreichbaren Lebensdauer H_{att} verwendet. In Kisssoft [1] werden diese Angaben im Protokoll dokumentiert und können für weitere Analysen übernommen werden (**Tabelle 04**).

Teil 2 dieses Artikels können Sie demnächst in der **antriebstechnik** lesen.

www.kisssoft.ag

Literaturverzeichnis:

[1] KISSsoft/KISSsys; *Festigkeitsberechnung für den Maschinenbau*; www.kisssoft.ag
 [2] DIN 743, *Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen*, 2012
 [3] FKM-Richtlinie, *Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile*, 2012
 [4] AGMA 6001-D97: *Design and Selection of Components for Enclosed Gear Drives*; AGMA, 1997
 [5] Falko, T.; Strasser, D; u. a.: *Determination of the Reliability for a Multi-Megawatt Wind Energy Gearbox*; VDI-Bericht Nr.2255, 2015
 [6] Bertsche, B.: *Reliability in Automotive and Mechanical Engineering*; Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2008